



TITLE:

5個の関数計算による実質的5次の ルンゲ・クッタ法 (数値計算のアル ゴリズムの研究)

AUTHOR(S):

戸田, 英雄; 小野, 令美

CITATION:

戸田, 英雄 ...[et al]. 5個の関数計算による実質的5次のルンゲ・クッタ法 (数値計算のアルゴリズムの研究). 数理解析研究所講究録 1979, 373: 28-53

ISSUE DATE:

1979-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104712>

RIGHT:

5個の関数計算による

実質的5次のルンゲ・クッタ法

電総研

戸田英雄

都立農藝高校 小野令美

0. まえおき

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

なる初期値問題の数値解法の一つである Kutta³⁾ 型の5段公式では、公式の局所打ち切り誤差の $O(h^5)$ の項までを0とする5次の公式は得られないが、 $f(x, y)$ から数式的に求めた f_x や f_y を用いれば5段で5次の公式が極限の公式として導ける⁶⁾。

しかし $O(h^5)$ の打ち切り誤差項を完全に0としなくても、 $O(h^6)$ の打ち切り誤差項に比べて無視出来る程度に小さくすればよい。このとき極限の公式で f_x や f_y を用いて計算した値は、有効桁数があまり必要でないことから、 f_x や f_y を用いなくても必要とする精度には求められるので、5段公式で実質的に5次の公式が得られる。この場合 m 進 n 桁の演算方式で結果の有効桁数の見振り式も得られた。

1. 5段で5次の公式 (f_x や f_y を用いる)

1.1 Kutta³⁾ 型 5段公式

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

なる初期値問題の数値解法で、刻み中を h とし

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^5 \mu_i k_i$$

ここに,

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_i = h \cdot f(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 2, 3, 4, 5$$

ただし,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

である。ここで $\mu_i, \beta_{ij}, \alpha_i$ は公式に含まれる

パラメータで, "Kutta の条件方程式" を作って決める。

1.2 "Kutta の条件方程式" の数式解

Kutta 型 5段公式の局所打ち切り誤差を E とすると,

$$E = \sum_{i=1}^6 E_i h^i + O(h^7)$$

ただし E_i は $O(h^i)$ の誤差項の h^i の係数であるが, 5次の

公式とするためには,

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 0 \quad (\text{Kutta の条件方程式})$$

を作ってこれを満たすように $\mu_i, \beta_{ij}, \alpha_i$ を $f(x, y)$ に

無関係に決めねばならない。しかし $E_5 = 0$ とすることは出

来ない (証明が与えられている) ので,

$$(1) \quad E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0$$

$$(2) \quad \delta_{51} = \delta_{52} = \delta_{53} = 0$$

を満たすように μ_i, β_{ij} を α_i をパラメータとして解く。

(田中⁴⁾のやり方に倣っているが数式的に解く。)

ここで、

$$(3) \quad E_5 = \delta_{51} D^4 f + \delta_{52} D^2 f_y \cdot Df + \delta_{53} Df_y \cdot D^2 f + \delta_{54} f_y^2 \cdot D^2 f \\ + \delta_{55} f_{yy} (Df)^2 + \delta_{56} f_y Df_y \cdot Df + \delta_{57} f_y D^3 f + \delta_{58} f_y^3 Df$$

をいし、

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} D^n f &\equiv \left(\partial/\partial x + f \cdot \partial/\partial y \right)^n f; \quad D^n f_y \equiv \left(\partial/\partial x + f \cdot \partial/\partial y \right)^n f_y, \\ n &= 1, 2, \dots, \\ \delta_{51} &= \left(\sum_{i=2}^5 \mu_i \alpha_i^4 - 1/5 \right) / 24 \\ \delta_{52} &= \left(\sum_{i=3}^5 \mu_i \alpha_i^2 X_{i1} - 1/10 \right) / 2 \\ \delta_{53} &= \left(\sum_{i=3}^5 \mu_i \alpha_i X_{i2} - 1/15 \right) / 2 \\ \delta_{54} &= \left(\mu_4 \beta_{43} X_{32} + \mu_5 \sum_{i=3}^4 \beta_{5i} X_{i2} - 1/60 \right) / 2 \\ \delta_{55} &= \left(\sum_{i=3}^5 \mu_i X_{i1}^2 - 1/20 \right) / 2 \\ \delta_{56} &= \mu_4 \beta_{43} (\alpha_3 + \alpha_4) X_{31} + \mu_5 \sum_{i=3}^4 \beta_{5i} (\alpha_i + \alpha_5) X_{i1} - 7/120 \\ \delta_{57} &= \left(\sum_{i=3}^5 \mu_i X_{i3} - 1/20 \right) / 6 \\ \delta_{58} &= \mu_5 \beta_{54} \beta_{43} X_{31} \\ \alpha_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad i = 3, 4, 5 \\ X_{il} &= \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} \alpha_j^l, \quad i = 3, 4, 5 \end{aligned} \right.$$

である。

(1) で得られる $O(h^4)$ までの誤差項を 0 とおいた方程式は

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 \mu_i = 1, \quad \sum_{i=2}^5 \mu_i \alpha_i = 1/2, \\ \sum_{i=2}^5 \mu_i \alpha_i^2 = 1/3, \quad \sum_{i=3}^5 \mu_i X_{i1} = 1/6, \\ \sum_{i=2}^5 \mu_i \alpha_i^3 = 1/4, \quad \sum_{i=3}^5 \mu_i X_{i2} = 1/12, \\ \sum_{i=3}^5 \mu_i \alpha_i X_{i1} = 1/8, \\ \mu_4 \beta_{43} X_{31} + \mu_5 \sum_{i=3}^4 \beta_{5i} X_{i1} = 1/24 \end{array} \right.$$

となる。また (2) の方程式は

$$(6) \quad \left| \begin{array}{l} \sum_{i=2}^5 \mu_i \alpha_i^4 = 1/5, \\ \sum_{i=3}^5 \mu_i \alpha_i^2 X_{i1} = 1/10, \\ \sum_{i=3}^5 \mu_i \alpha_i X_{i2} = 1/15 \end{array} \right.$$

となる。

これを α_i ($i=2(1)5$) をパラメタとして解き (ただし $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$ で $0 < \alpha_i \leq 1$ とする) δ_{54} , δ_{57} に代入すると, どちらも $(1-\alpha_5)$ の因子を持つので $\alpha_5=1$ と決めれば,

$$\delta_{54} = \delta_{57} = 0$$

となる。これは, 田中^{4), 5)} が数値的探索で $\alpha_5=1$ とした根拠である。

$\alpha_5=1$ として, 分母に含まれる因子はすべて 0 でないとして $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ をパラメタとした (5) と (6) の解は次のように求められる:

$$\mu_1 = \frac{30 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - 10 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_2) + 5 (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 3}{60 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$$

$$\mu_2 = \frac{10 \alpha_3 \alpha_4 - 5 \alpha_3 - 5 \alpha_4 + 3}{60 \alpha_2 (1 - \alpha_2) (\alpha_3 - \alpha_2) (\alpha_4 - \alpha_2)}$$

$$\mu_3 = - \frac{10 \alpha_2 \alpha_4 - 5 \alpha_2 - 5 \alpha_4 + 3}{60 \alpha_3 (1 - \alpha_3) (\alpha_4 - \alpha_3) (\alpha_3 - \alpha_2)}$$

$$\mu_4 = \frac{10 \alpha_2 \alpha_3 - 5 \alpha_2 - 5 \alpha_3 + 3}{60 \alpha_4 (1 - \alpha_4) (\alpha_4 - \alpha_3) (\alpha_4 - \alpha_2)}$$

(7)

$$\mu_5 = - \frac{30 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - 20 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_2) + 15 (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 12}{60 (1 - \alpha_2) (1 - \alpha_3) (1 - \alpha_4)}$$

$$p_{31} = \frac{\alpha_3 \{ (5 \alpha_3 + 20 \alpha_2^2 - 15 \alpha_2) \alpha_4 - 3 \alpha_3 - 10 \alpha_2^2 + 9 \alpha_2 \}}{2 \alpha_2 (10 \alpha_2 \alpha_4 - 5 \alpha_2 - 5 \alpha_4 + 3)}$$

$$p_{32} = \frac{\alpha_3 (\alpha_3 - \alpha_2) (3 - 5 \alpha_4)}{2 \alpha_2 (10 \alpha_2 \alpha_4 - 5 \alpha_2 - 5 \alpha_4 + 3)}$$

$$p_{41} = \frac{1}{2 \alpha_2 \alpha_3 (10 \alpha_2 \alpha_3 - 5 \alpha_3 - 5 \alpha_2 + 3)}$$

$$\times \alpha_4 \left\{ (2 - 5 \alpha_2) \alpha_4^2 + (5 \alpha_3^2 + 5 \alpha_2 \alpha_3 - 5 \alpha_3 + 5 \alpha_2^2 - 2 \alpha_2) \alpha_4 \right. \\ \left. + 20 \alpha_2^2 \alpha_3^2 - 15 \alpha_2^2 \alpha_3 - 15 \alpha_2 \alpha_3^2 + 11 \alpha_2 \alpha_3 \right\}$$

$$p_{42} = \frac{\alpha_4 (\alpha_4 - \alpha_2) (-5 \alpha_3^2 + 5 \alpha_3 - 3 \alpha_2 + 5 \alpha_2 \alpha_4 - 2 \alpha_4)}{2 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_2) (10 \alpha_2 \alpha_3 - 5 \alpha_2 - 5 \alpha_3 + 3)}$$

$$\beta_{43} = \frac{\alpha_4 (\alpha_4 - \alpha_2) (\alpha_4 - \alpha_3) (2 - 5\alpha_2)}{2\alpha_3 (\alpha_3 - \alpha_2) (10\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_2 - 5\alpha_3 + 3)}$$

$$\beta_{51} = \frac{1}{2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 p_5}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\alpha_4^2 \left\{ (60\alpha_2^2 - 60\alpha_2 + 20)\alpha_3^2 + (-60\alpha_2^2 + 75\alpha_2 - 25)\alpha_3 + 20\alpha_2^2 - 30\alpha_2 + 10 \right\} \right. \\ & + \alpha_4 \left\{ (-60\alpha_2^2 + 75\alpha_2 - 25)\alpha_3^2 + (75\alpha_2^2 - 105\alpha_2 + 36)\alpha_3 - 25\alpha_2^2 + 39\alpha_2 - 14 \right\} \\ & \left. + \left\{ (20\alpha_2^2 - 30\alpha_2 + 10)\alpha_3^2 + (-30\alpha_2^2 + 46\alpha_2 - 16)\alpha_3 + 10\alpha_2^2 - 16\alpha_2 + 6 \right\} \right] \end{aligned}$$

(7)

の 712

$$\beta_{52} = - \frac{(1 - \alpha_2)}{2\alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_2) (\alpha_4 - \alpha_2) p_5}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\alpha_4^2 (20\alpha_3^2 - 25\alpha_3 - 5\alpha_2 + 10) + \alpha_4 (-25\alpha_3^2 - 5\alpha_3\alpha_2 + 36\alpha_3 + 5\alpha_2^2 \right. \\ & \left. + 3\alpha_2 - 14) - 5\alpha_3^2\alpha_2 + 10\alpha_3^2 + 10\alpha_3\alpha_2 - 16\alpha_3 - 3\alpha_2^2 - 2\alpha_2 + 6 \right] \end{aligned}$$

$$\beta_{53} = \frac{(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)}{2\alpha_3 (\alpha_3 - \alpha_2) (\alpha_4 - \alpha_3) p_5}$$

$$\times \left[\alpha_4^2 (-20\alpha_3 + 10) + \alpha_4 (25\alpha_2 - 14) + 5\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_3 - 10\alpha_2 + 6 \right]$$

$$\beta_{54} = - \frac{(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_4) (10\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_2 - 5\alpha_3 + 3)}{\alpha_4 (\alpha_4 - \alpha_2) (\alpha_4 - \alpha_3) p_5}$$

$$\therefore \therefore z'',$$

$$p_5 = 30\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 20(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 15(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 12$$

$$z'' \text{ あり.}$$

1.3 微係数 f_x, f_y を用いた 5 段 5 次の公式 (極限の公式)

E_5 の中で残る $\delta_{55}, \delta_{56}, \delta_{58}$ に (7) を代入すると

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \delta_{55} &= - \frac{\alpha_2^2 (10\alpha_3\alpha_4 - 5\alpha_3 - 5\alpha_4 + 3)}{96(10\alpha_2\alpha_4 - 5\alpha_2 - 5\alpha_4 + 3)(10\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_2 - 5\alpha_3 + 3)} \\
 &\quad \times \frac{70\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 30(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 15(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 9}{30\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 20(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 15(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 12} \\
 \delta_{56} &= -\delta_{58} = \frac{\alpha_2(1 - \alpha_4)}{48(10\alpha_2\alpha_4 - 5\alpha_2 - 5\alpha_4 + 3)}
 \end{aligned}$$

となる。5 次の公式は $\delta_{55} = \delta_{56} = \delta_{58} = 0$

でなければならぬから、次の三通りの場合：

$$(A) \quad \alpha_2 = 0$$

$$(B-1) \quad \alpha_4 = 1 \text{ かつ } 10\alpha_3\alpha_4 - 5\alpha_3 - 5\alpha_4 + 3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (B-2) \quad \alpha_4 = 1 \text{ かつ } & 70\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 30(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) \\
 & + 15(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 9 = 0
 \end{aligned}$$

が考えられるが、 α_2 および $(1 - \alpha_4)$ は パラメータの分母に含まれている因数なので、このまゝでは 0 とすることはできない。

しかし、 $\mu_1, \mu_2, p_{i1}, p_{i2} (i=3, 4, 5)$ は 因数 $1/\alpha_2$ とおけば、 $\mu_1 + \mu_2, p_{i1} + p_{i2}, \mu_2\alpha_2, p_{i2}\alpha_2 (i=3, 4, 5)$ は 因数 $1/\alpha_2$ を持たないという性質から Kutta の公式の 1 部を次のように変形する：

$$(9) \quad \begin{cases} \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 = (\mu_1 + \mu_2) k_1 + \mu_2 \alpha_2 \cdot \frac{k_2 - k_1}{\alpha_2} \\ \beta_{i1} k_1 + \beta_{i2} k_2 = (\beta_{i1} + \beta_{i2}) k_1 + \beta_{i2} \alpha_2 \cdot \frac{k_2 - k_1}{\alpha_2}, \quad i=3,4,5 \end{cases}$$

すると,

$$(10) \quad \lim_{\alpha_2 \rightarrow 0} \frac{k_2 - k_1}{\alpha_2} = h^2 (f_x + f \cdot f_y)$$

なので,

$$\frac{k_2 - k_1}{\alpha_2} \quad \text{の代りに}$$

$$(11) \quad h^2 (f_x + f \cdot f_y)$$

を用いれば $\alpha_2 = 0$ とするこゝちが出る。

また, μ_4, μ_5 はともに, 因数 $1/(1-\alpha_4)$ をもつか,
 $\mu_4 + \mu_5, \mu_4(1-\alpha_4), \frac{\beta_{4j} - \beta_{5j}}{1-\alpha_4}, \frac{\beta_{54}}{1-\alpha_4}$ をつくと, これ

らは 因数 $1/(1-\alpha_4)$ をもたないから

$$(12) \quad \mu_4 k_4 + \mu_5 k_5 = (\mu_4 + \mu_5) k_5 + \mu_4(1-\alpha_4) \cdot \frac{k_4 - k_5}{1-\alpha_4}$$

と変形して, (11) と同様に

$$\frac{k_4 - k_5}{1-\alpha_4} \quad \text{の代りに}$$

$$(13) \quad -h^2 f_x + h \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\beta_{4j} - \beta_{5j}}{1-\alpha_4} k_j - \frac{\beta_{54}}{1-\alpha_4} k_4 \right) \cdot f_y$$

を用いれば, $\alpha_4 = 1$ とするこゝちがでる。

これが 微係数 f_x, f_y を用いた 5段5次の公式 (極限の公式) である。

1.4 可変なパラメタの決定 ($O(h^6)$ の誤差項をできるだけ小さくする)

極限の公式のパラメタ α_i は次の表のようになる:

公 式	5 次の公式とするために決まる α_i	可 変 な パ ラ メ タ
A 型	$\alpha_2 = 0$	α_3, α_4
B-1 型	$\alpha_4 = 1, \alpha_3 = \frac{2}{5}$	α_2
B-2 型	$\alpha_4 = 1, \alpha_3 = \frac{15\alpha_2 - 6}{40\alpha_2 - 15}$	α_2

極限の公式における $O(h^6)$ の誤差項は

$$A \text{ 型 では } E_6 = \sum_{j=1}^{15} \delta_{6j} (\alpha_2=0, \alpha_3, \alpha_4) \cdot F_{6j}$$

$$B \text{ 型 では } E_6 = \sum_{j=1}^{15} \delta_{6j} (\alpha_2) \cdot F_{6j}$$

とかける。ここで F_{6j} は $f(x, y)$ の高階の導関数である。

E_6 をできるだけ小さくするために、関数によらない部分 δ_{6j} と小さくすることを考え、三つの尺度すなわち、

$\max_j |\delta_{6j}|$, $\sqrt{\sum_j \delta_{6j}^2 / 15}$ および Lotkin による導関数の上界を用いた $|\delta_{6j}|$ の和の上界、これらで見て最もよい α_i と次のように決定した。⁶⁾

$$(14) \quad \begin{array}{|l} A \text{ 型} \\ B-1 \text{ 型} \\ B-2 \text{ 型} \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{5}{9} \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = \frac{1}{4} \quad (\alpha_3 = 9/20 \text{ とする。}) \end{array}$$

2. 5段で実復的に5次の公式 (f_x や f_y を用いない)

$\alpha_2 = 0$ または $1 - \alpha_4 = 0$ ならば $\delta_{ss} = \delta_{st} = \delta_{st} = 0$ となるが, 0 でなくてもじゅうぶん小さくすれば $|\delta_{ss}|, |\delta_{st}|, |\delta_{st}|$ を $O(h^6)$ の誤差にくらべて無視できる程度に小さくすることができる.

しかし $\alpha_2 = \varepsilon \div 0$ ($\varepsilon > 0$) とすると $\mu_1, \mu_2, \beta_{i1}, \beta_{i2}$ ^{$(i=3,4,5)$} は
 因数 $1/\alpha_2$ をもつので $\mu_1, \beta_{i1} \rightarrow -\infty, \mu_2, \beta_{i2} \rightarrow \infty$
 $(i=3,4,5)$ となり $\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2$ および $\beta_{i1} k_1 + \beta_{i2} k_2$ のところで大きな桁落ちが起るから, このままの形で計算したのではだめで (9) 式の変形を用いる. また $1 - \alpha_4 = \varepsilon \div 0$ ($\varepsilon > 0$) とすると同様に $\mu_4 \rightarrow \infty, \mu_5 \rightarrow -\infty$ となり $\mu_4 k_4 + \mu_5 k_5$ で大きな桁落ちが起るから (B-2 型でこの桁落ちの度合と打ち切り誤差をある尺度を用いて表わし, 最適な ε を定めたのが田中の公式^{(4), (5)}である) (12) 式を用いる. このようにすれば桁落ちはそれぞれ $k_2 - k_1, k_4 - k_5$ のところだけとなる.

$(k_2 - k_1)/\alpha_2, (k_4 - k_5)/(1 - \alpha_4)$ は極限の公式で f_x や f_y を用いて計算した量であるが, これらの値の絶対値は通常 $|y_n|$ にくらべて小さいから, あまり精度は要らない! しかも $k_2 - k_1$ または $k_4 - k_5$ で大きく桁落ちするものほど必要な有効桁数は少くてよいので, このままの形で計算する.

2.1 $\alpha_2 = \varepsilon \div 0$ ($\varepsilon > 0$) の A 型公式の係数

(9) 式の変形を行ない, $\alpha_3 = 1/2$, $\alpha_4 = 5/9$ といった係数:

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{-900\alpha_2^3 + 2012\alpha_2^2 - 1533\alpha_2 + 466}{300(1-\alpha_2)(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)},$$

$$\mu_2 \alpha_2 = \frac{3}{20(1-\alpha_2)(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)},$$

$$\mu_3 = -\frac{4(2+5\alpha_2)}{15(1-2\alpha_2)}, \quad \mu_4 = \frac{2187}{400(5-9\alpha_2)}, \quad \mu_5 = \frac{31-40\alpha_2}{240(1-\alpha_2)},$$

$$\beta_{31} + \beta_{32} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{32} \alpha_2 = \frac{1-2\alpha_2}{4(5\alpha_2+2)},$$

$$(15) \quad \beta_{41} + \beta_{42} = \frac{5(-90\alpha_2^2 - 76\alpha_2 + 61)}{729(1-2\alpha_2)}, \quad \beta_{42} \alpha_2 = \frac{5(5-9\alpha_2)(5-8\alpha_2)}{1458(1-2\alpha_2)},$$

$$\beta_{43} = \frac{10(5-9\alpha_2)(2-5\alpha_2)}{729(1-2\alpha_2)},$$

$$\beta_{51} + \beta_{52} = \frac{-450\alpha_2^3 + 358\alpha_2^2 - 447\alpha_2 + 359}{5(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)(31-40\alpha_2)},$$

$$\beta_{52} \alpha_2 = \frac{(1-\alpha_2)(-72\alpha_2^2 + 157\alpha_2 + 7)}{2(1-2\alpha_2)(5-9\alpha_2)(31-40\alpha_2)},$$

$$\beta_{53} = -\frac{10(1-\alpha_2)(10+7\alpha_2)}{(1-2\alpha_2)(31-40\alpha_2)}, \quad \beta_{54} = \frac{2916(1-\alpha_2)}{5(5-9\alpha_2)(31-40\alpha_2)}.$$

2.2 $\alpha_2 = \varepsilon \div 0$ の A 型 公式の打切り誤差の主要項

打切り誤差の主要項: $h^5(E_s + E_6 h)$

$$(16) \quad E_6 = \sum_{j=1}^{15} \delta_{6j}(\alpha_2, \alpha_3=1/2, \alpha_4=5/9) \cdot F_{6j}$$

$\alpha_2 = \varepsilon \div 0$ ならば

$$(17) \quad \delta_{6j}(\alpha_2, \alpha_3=1/2, \alpha_4=5/9) \doteq \delta_{6j}(\alpha_2=0, \alpha_3=1/2, \alpha_4=5/9)$$

なるので, これを δ_{6j} と略記すると,

$$(18) \quad \begin{cases} |\delta_{61}| &= 1/32400 \quad \doteq .309_{10}^{-4} \\ |\delta_{62}| &= 1/6480 \quad \doteq .154_{10}^{-3} \\ \delta_{63} &= \delta_{66} = \delta_{613} = \delta_{615} = 0 \\ |\delta_{64}| = |\delta_{65}| &= 1/720 \quad \doteq .139_{10}^{-2} \\ |\delta_{67}| = |\delta_{68}| = |\delta_{610}| = |\delta_{611}| = |\delta_{612}| = |\delta_{614}| \\ &= 1/2160 \quad \doteq .463_{10}^{-3} \\ |\delta_{69}| &= 1/3240 \quad \doteq .309_{10}^{-3} \end{cases}$$

$$(19) \quad E_s = \sum_{j=5,6,8} \delta_{sj}(\alpha_2, \alpha_3=1/2, \alpha_4=5/9) \cdot F_{sj},$$

(F_{sj} は (3) の δ_{sj} の係数)

$$(20) \quad \begin{cases} \delta_{ss} = -\frac{3\alpha_2^2(50\alpha_2-27)}{32(5\alpha_2+2)(40\alpha_2-31)} \doteq -\frac{81}{1984} \alpha_2^2 \\ \delta_{s6} = -\delta_{s8} = \frac{\alpha_2}{12(5\alpha_2+2)} \doteq \frac{\alpha_2}{24} \end{cases}$$

2.3 $|E_s h^5| \ll |E_6 h^6|$ となるような α_2 の決定

(20) から $|\delta_{56}| = |\delta_{58}| \gg |\delta_{55}|$ なるので

$$|\delta_{56}| \div \frac{\alpha_2}{24} \div (|\delta_{ij}| \text{ の代表}) \times (h \text{ の代表}) \\ = 1/2160 \times 10^{-3}$$

とすると $\alpha_2 \div .11_{10} \cdot 10^{-4}$ となり, $2^{-16} \div .15_{10} \cdot 10^{-4}$ なので $\alpha_2 = 2^{-16}$ と決める. このようにすれば, たとえば E_6 が 0 で E_5 が比較的大きい場合のような例を除けば, $|E_s h^5| \ll |E_6 h^6|$ となる.

2.4 $\alpha_2 = \varepsilon \div 0$ ($\varepsilon > 0$) の A 型公式

$$(21) \quad y_{n+1} = y_n + (\mu_1 + \mu_2)k_1 + \mu_2 \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2 + \sum_{i=3}^5 \mu_i k_i$$

ここに

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} k_1)$$

$$k_3 = h f(x_n + \alpha_3 h, y_n + (\beta_{31} + \beta_{32})k_1 + \beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2)$$

$$k_4 = h f(x_n + \alpha_4 h, y_n + (\beta_{41} + \beta_{42})k_1 + \beta_{42} \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2 \\ + \beta_{43} k_3)$$

$$k_5 = h f(x_n + h, y_n + (\beta_{51} + \beta_{52})k_1 + \beta_{52} \alpha_2 (k_2 - k_1)/\alpha_2 \\ + \beta_{53} k_3 + \beta_{54} k_4)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{65536}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{5}{9},$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{2 \ 18601 \ 25849 \ 02641}{7 \ 03635 \ 90338 \ 14950},$$

$$\mu_2 \alpha_2 = \frac{3518 \ 43720 \ 88832}{1 \ 17272 \ 65056 \ 35825},$$

$$\mu_3 = -\frac{2 \ 62154}{4 \ 91505}, \quad \mu_4 = \frac{89 \ 57952}{81 \ 91775}, \quad \mu_5 = \frac{84649}{6 \ 55350},$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{65536},$$

$$\beta_{31} + \beta_{32} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{32} \alpha_2 = \frac{32767}{2 \ 62154},$$

$$\beta_{41} + \beta_{42} = \frac{7 \ 27744 \ 51175}{17 \ 39408 \ 67072}, \quad \beta_{42} \alpha_2 = \frac{24853 \ 84535}{2 \ 89901 \ 44512},$$

$$\beta_{43} = \frac{2 \ 38593 \ 63865}{17 \ 39408 \ 67072},$$

$$\beta_{51} + \beta_{52} = \frac{3 \ 36825 \ 32270 \ 73521}{7 \ 27087 \ 21245 \ 55144},$$

$$\beta_{52} \alpha_2 = \frac{8212 \ 37111 \ 27555}{3 \ 63543 \ 60622 \ 77572},$$

$$\beta_{53} = -\frac{7 \ 15824 \ 60575}{2 \ 21895 \ 50264}, \quad \beta_{54} = \frac{10 \ 43661 \ 12768}{2 \ 77370 \ 22479},$$

である。

2.5 $\alpha_2 = \varepsilon \div 0$ の A 型公式による結果の有効桁数の 見直し

$\alpha_2 \div 0$ のために $k_2 - k_1$ の計算で起る桁落ちを考慮しても, $k_i (i=3, 4, 5)$ と y_{n+1} の有効桁数は, m 進法 n 桁演算で, $n - 14 \log_m 2$ 以上保たれる. (ただし $|\beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1) / \alpha_2|$ が加えあわせる項のうち最大である場合を除く)

これは次のようにして示される:

k_3 の計算における $y_n + (\beta_{31} + \beta_{32}) k_1 + \beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1) / \alpha_2$ の有効桁数を N_3 とすると,

$$i) \max \{ |y_n|, |(\beta_{31} + \beta_{32}) k_1|, |\beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1) / \alpha_2| \} = |y_n|$$

ならば N_3 は y_n と $\beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1) / \alpha_2$ の m 進法での桁数の差と, $k_2 - k_1$ の m 進法での有効桁数の和になるから

$$\begin{aligned} (22) \quad N_3 &= \log_m |y_n| - \log_m |\beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1) / \alpha_2| \\ &\quad + \{ n - (\log_m |k_1| - \log_m |k_2 - k_1|) \} \\ &= n - \log_m \beta_{32} \alpha_2 + \log_m \alpha_2 + \log_m |y_n / k_1| \end{aligned}$$

仮定から $|(\beta_{31} + \beta_{32}) k_1| = |\alpha_3 k_1| < |y_n|$ なること

$$N_3 > n - \log_m \beta_{32} \alpha_2 + \log_m \alpha_2 + \log_m \alpha_3,$$

(15) からわかるように $\beta_{32} \alpha_2 \div 1/8$ なること

$$\div n - \log_m 1/8 + \log_m 2^{-16} + \log_m 1/2$$

$$= n - 14 \log_m 2 \div n - 4.21 \quad (m=10 \text{ のとき})$$

$$ii) \max \{ |y_n|, |(\beta_{31} + \beta_{32}) k_1|, |\beta_{32} \alpha_2 (k_2 - k_1) / \alpha_2| \} = |(\beta_{31} + \beta_{32}) k_1|$$

よらば, N_3 は $(\beta_{31} + \beta_{32})k_1$ と $\beta_{32}\alpha_2(k_2 - k_1)/\alpha_2$ の m 進法での桁数の差と $k_2 - k_1$ の m 進法での有効桁数の和になるから

$$\begin{aligned}
 (23) \quad N_3 &= \log_m |(\beta_{31} + \beta_{32})k_1| - \log_m |\beta_{32}\alpha_2(k_2 - k_1)/\alpha_2| \\
 &\quad + \{n - (\log_m |k_1| - \log_m |k_2 - k_1|)\} \\
 &= n - \log_m \beta_{32}\alpha_2 + \log_m \alpha_2 + \log_m \alpha_3 \\
 &\doteq n - 14 \log_m 2
 \end{aligned}$$

となり $|\beta_{32}\alpha_2(k_2 - k_1)/\alpha_2|$ が最大である場合を除けば

$$(24) \quad N_3 \geq n - 14 \log_m 2.$$

k_4, k_5 の計算で $y_n + (\beta_{41} + \beta_{42})k_1 + \beta_{42}\alpha_2(k_2 - k_1)/\alpha_2 + \beta_{43}k_3$ および $y_n + (\beta_{51} + \beta_{52})k_1 + \beta_{52}\alpha_2(k_2 - k_1)/\alpha_2 + \beta_{53}k_3 + \beta_{54}k_4$ の有効桁数をそれぞれ N_4, N_5 とすると N_3 と全く同様にして

$$\begin{aligned}
 (25) \quad N_4 &\geq n - \log_m \beta_{42}\alpha_2 + \log_m \alpha_2 + \log_m (\beta_{41} + \beta_{42}) \\
 &\doteq n - \log_m 2^{15} \cdot 5^2 / 61 \doteq n - 4.13 \quad (m=10 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (26) \quad N_5 &\geq n - \log_m \beta_{52}\alpha_2 + \log_m \alpha_2 + \log_m \beta_{54} + \log_m |k_4/k_1| \\
 &\doteq n - \log_m 2^{13} \cdot 5 \cdot 7 / 729 \doteq n - 2.59 \quad (m=10 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

となり, また y_{n+1} の計算の有効桁数を N_6 とすると同様に

$$\begin{aligned}
 (27) \quad N_6 &\geq n - \log_m \mu_2\alpha_2 + \log_m \alpha_2 + \log_m \mu_4 + \log_m |k_4/k_1| \\
 &\doteq n - \log_m 2^{18} \cdot 5 / 729 \doteq n - 3.25 \quad (m=10 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

となる。

$N_3 \doteq n - 14 \log_m 2$ は N_4, N_5, N_6 より小さいので k_3, k_4, k_5, y_{n+1} の有効桁数は少なくとも N_3 桁すなわち $n - 14 \log_m 2$ 桁は保証される。

2.6 $\alpha_4 = 1 - \varepsilon \div 1$ ($\varepsilon > 0$) の公式

2.6.1 B-1 型公式

A 型公式の場合と同様に $1 - \alpha_4 = \varepsilon \div 0$, $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/5$ のとき

$$(28) \quad \delta_{6j} (\alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 2/5, \alpha_4) \div \delta_{6j} (\alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 2/5, \alpha_4 = 1)$$

とみなせるから, これを δ_{6j} と略記すると

$$(29) \quad \begin{array}{ll} |\delta_{61}| & = 1/36000 \div .278_{10}^{-4} \\ |\delta_{62}| & = 1/7200 \div .139_{10}^{-3} \\ |\delta_{63}| = |\delta_{66}| = |\delta_{69}| & = 1/3600 \div .278_{10}^{-3} \\ \delta_{64} = \delta_{67} = \delta_{611} = \delta_{612} & = 0 \\ |\delta_{65}| & = 1/720 \div .139_{10}^{-2} \\ |\delta_{68}| & = 1/300 \div .333_{10}^{-2} \\ |\delta_{610}| & = 1/1800 \div .556_{10}^{-3} \\ |\delta_{613}| & = 7/7200 \div .972_{10}^{-3} \\ |\delta_{614}| & = 1/2400 \div .417_{10}^{-3} \\ |\delta_{615}| & = 1/1200 \div .833_{10}^{-3} . \end{array}$$

$$(30) \quad \begin{array}{l} \delta_{55} = \frac{(1 - \alpha_4)(7\alpha_4 - 6)}{192(5\alpha_4 - 4)(13\alpha_4 - 11)} \div \frac{1 - \alpha_4}{384} \\ \delta_{56} = -\delta_{58} = -\frac{1 - \alpha_4}{48(5\alpha_4 - 4)} \div -\frac{1 - \alpha_4}{48} \end{array}$$

A型の場合と同様に

$$|\delta_{56}| \div \frac{1-\alpha_4}{48} \div (|\delta_{6j}| \text{の代表}) \times (h \text{の代表}) \\ = 1/3600 \times 10^{-3}$$

とすると, $1-\alpha_4 \div .13_{10}-4$ となり, $2^{-16} \div .15_{10}-4$ なので
 $1-\alpha_4 = 2^{-16}$ に決める.

$1-\alpha_4 \div 0$ のために k_4-k_5 の計算で起る桁落ちについては
 y_{n+1} の有効桁数を N とすると $|\mu_4(1-\alpha_4)(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)|$ が
 加え合わせる項のうち最大でなければ

$$(31) \quad N \geq n - \log_m \mu_4(1-\alpha_4) + \log_m(1-\alpha_4) \\ + \log_m \mu_3 + \log_m |k_3/k_5| \\ \div n - \log_m 2^{17.3}/125 \div n - 3.50 \quad (m=10 \text{ のとき}).$$

したがって y_{n+1} の有効桁数は少なくとも $n - \log_m 2^{17.3}/125$ 桁は
 保証される.

2.6.2 B-2 型公式

$1-\alpha_4 = \varepsilon \div 0$, $\alpha_2 = 1/4$, $\alpha_3 = 9/20$ のとき

$$(32) \quad \delta_{6j}(\alpha_2=1/4, \alpha_3=9/20, \alpha_4) \div \delta_{6j}(\alpha_2=1/4, \alpha_3=9/20, \alpha_4=1)$$

なのでこれを δ_{6j} と書くと

$$(33) \quad \begin{cases} |\delta_{61}| & = 13/576000 \div .226_{10}-4 \\ |\delta_{62}| & = 13/115200 \div .113_{10}-3 \\ |\delta_{63}| = |\delta_{66}| & = 13/57600 \div .226_{10}-3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & |\delta_{64}| = |\delta_{611}| = 1/2880 \div .347_{10}^{-3} \\
 & |\delta_{65}| = 1/720 \div .139_{10}^{-2} \\
 & |\delta_{67}| = 1/960 \div .104_{10}^{-2} \\
 & |\delta_{68}| = 3/800 \div .375_{10}^{-2} \\
 & |\delta_{69}| = |\delta_{612}| = 1/7200 \div .139_{10}^{-3} \\
 & |\delta_{610}| = 7/7200 \div .972_{10}^{-3} \\
 & |\delta_{613}| = 1/14400 \div .694_{10}^{-4} \\
 & |\delta_{614}| = 1/4800 \div .208_{10}^{-3} \\
 & |\delta_{615}| = 1/2400 \div .417_{10}^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \delta_{55} = -\frac{(1-\alpha_4)(3-2\alpha_4)}{320(10\alpha_4-7)(7\alpha_4-6)} \div -\frac{1-\alpha_4}{960} \\
 & \delta_{56} = -\delta_{58} = -\frac{1-\alpha_4}{48(10\alpha_4-7)} \div -\frac{1-\alpha_4}{144}
 \end{aligned}$$

$|\delta_{6j}|$ の代表として $.5_{10}^{-3}$ とすると,

$$|\delta_{56}| \div (1-\alpha_4)/144 \div .5_{10}^{-6}$$

から, $1-\alpha_4 \div .72_{10}^{-4}$ となり, $2^{-14} \div .61_{10}^{-4}$ なので
 $1-\alpha_4 = 2^{-14}$ に決める.

桁落ちについては, y_{n+1} の有効桁数を N とすると

$|\mu_4(1-\alpha_4)(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)|$ が加え合わせる項のうち最大でなければ

$$\begin{aligned}
 (35) \quad N &\geq n - \log_m \mu_4 (1 - \alpha_4) + \log_m (1 - \alpha_4) \\
 &\quad + \log_m \mu_3 + \log_m |k_3 / k_5| \\
 &\div n - \log_m 2^{11} \cdot 11 / 5^2 \div n - 2.95 \quad (m=10 \text{ のとき}).
 \end{aligned}$$

したがって y_{n+1} の有効桁数は少なくとも $n - \log_m 2^{11} \cdot 11 / 5^2$ 桁は保証される。

2.7 $\alpha_4 = 1 - \varepsilon \div 1$ ($\varepsilon > 0$) の B 型 公式

$$(36) \quad y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^3 \mu_i k_i + (\mu_4 + \mu_5) k_5 + \mu_4 (1 - \alpha_4) (k_4 - k_5) / (1 - \alpha_4)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 &k_1 = h f(x_n, y_n) \\
 &k_i = h f(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) \quad (\alpha_5 = 1, i=2, 3, 4, 5)
 \end{aligned}$$

	B-1 型	B-2 型
α_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
α_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{20}$
α_4	$\frac{65535}{65536}$	$\frac{16383}{16384}$
μ_1	$\frac{1 \ 96603}{15 \ 72840}$	$\frac{98293}{8 \ 84682}$

	B - 1 型	B - 2 型
μ_2	$\frac{27}{10 \ 48552}$	$\frac{5462}{36861}$
μ_3	$\frac{81 \ 91357}{141 \ 55416}$	$\frac{61 \ 42750}{133 \ 80147}$
$\mu_4 + \mu_5$	$\frac{1 \ 33433 \ 73751 \ 01831}{4 \ 50331 \ 33021 \ 59320}$	$\frac{1532 \ 36204 \ 23985}{5441 \ 20358 \ 33826}$
$\mu_4(1-\alpha_4)$	$\frac{14073 \ 74883 \ 55328}{5 \ 06622 \ 74649 \ 29235}$	$\frac{68 \ 71947 \ 67360}{2720 \ 60179 \ 16913}$
β_{21}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
β_{31}	$\frac{2 \ 62109}{16 \ 38275}$	$- \frac{73773}{24 \ 57100}$
β_{32}	$\frac{3 \ 93201}{16 \ 38275}$	$\frac{2 \ 94867}{6 \ 14275}$
β_{41}	$\frac{56293 \ 70695 \ 67985}{2 \ 25179 \ 98136 \ 85248}$	$\frac{192 \ 36476 \ 75049}{137 \ 43895 \ 34720}$
β_{42}	$- \frac{3 \ 37744 \ 20285 \ 84915}{1 \ 12589 \ 99068 \ 42624}$	$- \frac{1731 \ 18225 \ 03921}{549 \ 75581 \ 38880}$
β_{43}	$\frac{8 \ 44371 \ 24415 \ 48725}{2 \ 25179 \ 98136 \ 85248}$	$\frac{302 \ 28908 \ 79657}{109 \ 95116 \ 27776}$
β_{51}	$\frac{7157 \ 95117}{28629 \ 83855}$	$\frac{11271 \ 83177}{8049 \ 13173}$
β_{52}	$- \frac{5 \ 15364 \ 62031}{1 \ 71777 \ 72071}$	$- \frac{192 \ 13145}{60 \ 97703}$
β_{53}	$\frac{9 \ 66293 \ 91735}{2 \ 57665 \ 92577}$	$\frac{60881 \ 02163}{22134 \ 00681}$
β_{54}	$- \frac{1 \ 12589 \ 99068 \ 42624}{73774 \ 96725 \ 84622 \ 89985}$	$- \frac{27 \ 48779 \ 06944}{4 \ 50053 \ 49032 \ 85699}$

3. 結論

2. で求めた 5 段で実值的に 5 次とみなせる三つの公式のどれがよいかはいまいちにはいえない。

桁落ちの面からみると $|\beta_{12}\alpha_2(k_2-k_1)/\alpha_2|$ や $|\mu_4(1-\alpha_4)(k_4-k_5)/(1-\alpha_4)|$ が最大となるような場合を除いて、失なわれる桁数は

A 型 で 0 桁 $\sim 14 \log_m 2$ 桁 (10 進で 4.2 桁)

B-1 型で 0 桁 $\sim \log_m 2^{17} \cdot 3/125$ 桁 (10 進で 3.5 桁)

B-2 型で 0 桁 $\sim \log_m 2^{11} \cdot 11/5^2$ 桁 (10 進で 3.0 桁)

となって B-2 型が最もよい。

局所打ち切り誤差からながめると

尺度 公式	$\delta_{ij} \div 0$ の個数	$\sqrt{\sum \delta_{ij}^2 / 15}$	$\sum \delta_{ij} $	Lotkin 和	$ \delta_{56} $
A 型	4	$.592_{10^{-3}}$	$.605_{10^{-2}}$	$.303_{10^{-1}}$	$.636_{10^{-6}}$
B-1 型	4	$.101_{10^{-2}}$	$.850_{10^{-2}}$	$.392_{10^{-1}}$	$.318_{10^{-6}}$
B-2 型	0	$.112_{10^{-2}}$	$.941_{10^{-2}}$	$.455_{10^{-1}}$	$.424_{10^{-6}}$

となり A 型が最もよい。

たいていは、桁落ちによる誤差よりも $O(10^6)$ の局所打ち切り誤差の方が大きく、また $14 \log_m 2$ 桁も桁落ちすることはめったにないから、A 型公式が最良であるといえよう。

4. 数値例 (極限の公式 (O(R⁵))の誤差項は完全に0) との比較) ———は $y(x_n)$ とのちがひ

▲ は 極限の公式とのちがひ

例 1) $dy/dx = -1/2y$, $y(0) = 1$, $R = 0.05$, $y(x) = \sqrt{1-x}$

x_n	y_n	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$
A 型公式 0.500D-01	0.9746794344772095	-0.3687D-11	-0.7812E-04	-0.5358E-04	-0.1412E-04
A 型極限公式 0.500D-01	0.9746794344772164	-0.3680D-11	-0.7813E-04	-0.5358E-04	-0.1411E-04
$y(x_n)$	0.9746794344808964				
0.920	0.2236026460606580	-0.4152D-05	-0.2470E-02	-0.1694E-02	-0.4465E-03
0.920	0.2236026468033837	-0.4151D-05	-0.2471E-02	-0.1694E-02	-0.4463E-03
	0.2236067977499790				

例 2) $dy/dx = y^6$, $y(0) = -2$, $R = 0.01$, $y(x) = -2/(160x+1)^{1/5}$

x_n	y_n	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$
0.100D-01	-1.650838970093880	0.1257D-02	-0.1536	-0.1053	-0.2776E-01
0.100D-01	-1.650838531746555	0.1258D-02	-0.1536	-0.1053	-0.2775E-01
	-1.652096176384267				
0.200	-0.9938645673664113	0.9442D-11	-0.7818E-04	-0.5363E-04	-0.1413E-04
0.200	-0.9938645673663980	0.9455D-11	-0.7819E-04	-0.5363E-04	-0.1412E-04
	-0.9938645673758531				

例 3) $dy/dx = -xy$, $y(0) = 1$, $R = 0.1$, $y(x) = \exp(-x^2/2)$

x_n	y_n	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$	$\beta_{2,0} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2}$
0.100	0.9950124791894952	-0.3187D-11	-0.1250E-02	-0.8573E-03	-0.2259E-03
0.100	0.9950124791898148	-0.2867D-11	-0.1250E-02	-0.8573E-03	-0.2258E-03
	0.9950124791926823				
3.00	0.1110898790035604D-01	-0.8638D-08	0.1382E-03	0.9479E-04	0.2498E-04
3.00	0.1110898788005302D-01	-0.8628D-08	0.1382E-03	0.9479E-04	0.2497E-04
	0.1110899653824231D-01				

例 1) $dy/dx = -1/2y$, $y(0)=1$, $h=0.05$, $y(x)=\sqrt{1-x}$

x_n	y_n	$y_n - y(x_n)$	$\mu_n(1-\alpha_n) \frac{R_n - R_5}{1-\alpha_n}$
0.500D-01	0.9746794344820355	0.1139D-11	0.1876E-04
0.500D-01	0.9746794344820329	0.1137D-11	0.1876E-04
	0.9746794344808964		
0.950	0.2236074179939644	0.6202D-06	0.1507E-02
0.950	0.2236074177982346	0.6200D-06	0.1507E-02
	0.2236067977499790		

例 2) $dy/dx = y^6$, $y(0) = -2$, $h = 0.01$, $y(x) = -2/(160x+1)^{1/5}$

0.100D-01	-1.659472679505785	-0.7377D-02	0.2241E-01
0.100D-01	-1.659471600900501	-0.7375D-02	0.2241E-01
	-1.652096176384267		
0.200	-0.9938645673803920	-0.4542D-11	0.1564E-04
0.200	-0.9938645673804059	-0.4553D-11	0.1564E-04
	-0.9938645673758531		

例 3) $dy/dx = -xy$, $y(0)=1$, $h=0.1$, $y(x) = \exp(-x^2/2)$

0.100	0.9950124783667946	-0.8259D-09	0.2736E-03
0.100	0.9950124783666667	-0.8260D-09	0.2736E-03
	0.9950124791926823		
3.00	0.1110898187370353D-01	-0.1466D-07	-0.2850E-04
3.00	0.1110898188405222D-01	-0.1465D-07	-0.2850E-04
	0.1110899653824231D-01		

例 1) $dy/dx = -1/2y$, $y(0) = 1$, $h = 0.05$, $y(x) = \sqrt{1-x}$

x_n	y_n	$y_n - y(x_n)$	$\mu_n(-d_0) \frac{h_0 - h_5}{1 - d_0}$
B-2型公式	0.500D-01	0.9746794344816424	0.7460D-12
标准公式	0.500D-01	0.9746794344816374	0.7411D-12
$y(x_n)$		0.9746794344808964	0.1690E-04
0.920	0.2236079108997409	0.1113D-05	0.1360E-02
0.920	0.2236079113696007	0.1114D-05	0.1359E-02
	0.2236067977499790		

例 2) $dy/dx = y^6$, $y(0) = -2$, $h = 0.01$, $y(x) = -2/(160x+1)^{\frac{1}{5}}$

0.100D-01	-1.665665760293473	-0.1357D-01	0.1904E-01
0.100D-01	-1.665662236364354	-0.1357D-01	0.1903E-01
	-1.652096176384267		
0.200	-0.9938645673900593	-0.1421D-10	0.1462E-04
0.200	-0.9938645673900571	-0.1420D-10	0.1462E-04
	-0.9938645673758531		

例 3) $dy/dx = -xy$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$, $y(x) = \exp(-x^2/2)$

0.100	0.9950124187876904	-0.4050D-09	0.2500E-03
0.100	0.9950124187875000	-0.4052D-09	0.2499E-03
	0.9950124791926823		
3.00	0.1110898246910664D-01	-0.1407D-07	-0.2983E-04
3.00	0.1110898248259336D-01	-0.1406D-07	-0.2982E-04
	0.1110899653824231D-01		

参 考 文 献

- 1) C. Runge, "Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen, Math. Ann. 46, 167-178 (1895).
- 2) K. Heun, Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen, Z. Math. Physik, 45, 23-38 (1900).
- 3) W. Kutta, Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen, Z. Math. Physik, 46, 435-453 (1901).
- 4) 田中正次, Runge-Kutta 法の打ち切り誤差に関する研究, 東京大学に提出した論文 (1972).
- 5) 田中正次, Runge-Kutta 法の打ち切り誤差の評価について, 情報処理, 17, 12, 1143-1151 (1976).
- 6) 戸田英雄, Runge-Kutta 系のある極限公式の打ち切り誤差についての研究, 電子技術総合研究所研究報告, 772 (1977).